

(1)(a)(i) není pravda, stačí zvolit $f(x,y) = x^2 + y^2$
potom $H_f(0,-3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, ale $\frac{\partial f}{\partial y}(0,-3) = -6 \neq 0$.

(ii) je pravda, stačí zvolit

$$L(x,y) = -\frac{\partial f}{\partial x}(0,-3) \cdot x - \frac{\partial f}{\partial y}(0,-3) \cdot y.$$

Potom $\nabla(f+L)(0,-3) = (0,0)$ a $H_{f+L}(0,-3) = H_f(0,-3)$

a $f+L$ má v bodě $(0,-3)$ lokální minimum

(iii) je pravda, existence plyne z (ii),
dokažeme ještě jednoznačnost.

Pokud $f+L_1$ i $f+L_2$ mají v bodě $(0,-3)$
lokální minimum, potom pro $i=1,2$

$$0 = \nabla(f+L_i)(0,-3) = \nabla f(0,-3) + \nabla L_i(0,-3)$$

a tedy $\nabla L_1(0,-3) = \nabla L_2(0,-3)$ a tedy $L_1 = L_2$
jsou-li L_1, L_2 lineární.

(2)(d)(i) neplatí, stačí uvážit $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$,

potom $\sum a_n$ i $\sum b_n$ konvergují podle Leibnitova kritéria, ale řada $\sum a_n b_n = \sum \frac{1}{n}$ diverguje

(ii) platí, protože $\sum a_n$ konverguje platí $a_n \rightarrow 0$, a tedy existuje $C \in \mathbb{R}$, že $|a_n| \leq C \quad n \in \mathbb{N}$.

Potom $\sum |a_n b_n| \leq \sum C |b_n|$ a tedy řada

$\sum a_n b_n$ konverguje absolutně podle srovnávacího kritéria

(iii) platí, plyne z (ii)

(3) volume $f, g, h \in C([0, 2])$, potom

$$(i) \quad \rho_{\max}(f, g) = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x), x \in [0, 2] \Leftrightarrow f = g$$

$$(ii) \quad \rho_{\max}(f, g) = \max_{x \in [0, 2]} |f(x) - g(x)| = \max_{x \in [0, 2]} |g(x) - f(x)|$$

$$= \rho_{\max}(g, f)$$

(iii) pro $x \in [0, 2]$ platí

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x)| &\leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)| \\ &\leq \rho_{\max}(f, h) + \rho_{\max}(h, g) \end{aligned}$$

$$\text{tedy i} \quad \rho_{\max}(f, g) \leq \rho_{\max}(f, h) + \rho_{\max}(h, g)$$

Rovněž zjevně $\rho_{\max}(f, g) \in [0, \infty)$ a tedy

$\rho_{\max}$ je metrika na $C([0, 2])$.

(d) volume $0 < v < 1$, $\bar{z} \in$

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq v|x, y|, \quad x, y \in \mathbb{R}^2 \quad (*)$$

Potom pro $f, g \in C([0, 2])$ a $x \in [0, 2]$

$$\begin{aligned} |\Phi(f)(x) - \Phi(g)(x)| &= \left| \frac{1}{2} \int_0^x \phi(t, f(t)) - \phi(t, g(t)) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^x |\phi(t, f(t)) - \phi(t, g(t))| dt \\ (*) \quad &\leq \frac{1}{2} \int_0^x v \cdot \sqrt{(t-t)^2 + (f(t) - g(t))^2} dt \\ &= \frac{v}{2} \int_0^x |f(t) - g(t)| dt \leq \frac{1}{2} \int_0^x s_{\max}(f, g) dt \\ &= \frac{v}{2} x \cdot s_{\max}(f, g) \leq v \cdot s_{\max}(f, g) \end{aligned}$$

Tedy platí

$$s_{\max}(\Phi(f), \Phi(g)) \leq v \cdot s_{\max}(f, g),$$

(o $\bar{z}$ jsme potřebovali.